УДК 519.85

В.В. Сёмкин, А.М. Чугай
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина
Украина, 61046, г. Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10

Размещение неориентированных трехмерных объектов с учетом кратчайших расстояний

V.V. Semkin, A.M. Chugay
Institute for Mechanical Engineering Problems, National Academy of Sciences of Ukraine
Ukraine, 61046, Kharkov, Pozharsky St. 2/10

A Placement of Non-Oriented Three Dimensional Objects Taking Into Account Shortest Distances

В.В. Сьомкін, А.М. Чугай
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАНУ, Україна
Україна, 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10

Розміщення неорієнтованих тривимірних об’єктів з урахування найкоротших відстаней

На основании псевдонормализованных квази Ф-функций построена математическая модель задачи размещения неориентированных трехмерных геометрических объектов в кубоиде минимальной высоты с учетом кратчайших расстояний. Построенная математическая модель и предложенный метод решения позволили ввести в рассмотрение расширенный класс размещаемых объектов. Представлен численный пример.
Ключевые слова: псевдонормализованная квази Ф-функция, задача размещения, неориентированные трехмерные геометрические объекты.

On the ground of pseudonormalized quasi Φ-functions a mathematical model of a non-oriented objects placement problem into a cuboid of the minimal height with account of shortest distances is built. The model and a proposed method for solving the problem allow us to consider an extended class of geometric objects to be placed. A numerical example is given.
Key words: pseudonormalized quasi Φ-function, placement problem, non-oriented three dimensional geometric objects.

На основі псевдонормалізованих квазі Ф-функцій побудовано математичну модель задачі розміщення неорієнтованих тривимірних об’єктів у кубоїді мінімальної висоти з урахуванням мінімально припустимих відстаней. Побудована модель і запропонований метод розв’язання задачі дозволили ввести в розгляд розширений клас геометричних об’єктів. Наведено числовий приклад.
Ключові слова: псевдонормалізована квазі Ф-функція, задача розміщення, неорієнтовані тривимірні геометричні об’єкти.

Задачи размещения трехмерных геометрических объектов с учетом кратчайших расстояний широко используются в науке и технике [1]. Следует отметить, что к настоящему времени разработаны методы размещения ориентированных стандартных геометрических объектов (шар, параллелепипед, цилиндр) с учетом заданных минимально допустимых расстояний. Однако в реальности очень часто приходится сталкиваться с задачами компоновки объектов произвольных пространственных форм [2]. На сегодняшний день авторам не известны работы, посвященные разработке методов размещения неориентированных объектов с учетом кратчайших расстояний. Поскольку

результат решения компоновочных задач может быть существенно улучшен за счет введения допустимых поворотов размещаемых объектов, то в данной работе предлагается подход, позволяющий учитывать возможность изменения ориентации компонуемых объектов.

Целью данного исследования является построение адекватной математической модели задачи размещения трехмерных объектов с учетом кратчайших расстояний и разработка метода поиска локальных минимумов данной задачи.

Пусть задано множество размещаемых трехмерных объектов $O_i \in R^3$, $i \in I = \{1,\ldots,n\}$ (рис. 1). Объект O_i может быть сфероконусом sK_i или одним из объектов, порождаемых сфероконусом (конус K_i, усеченный конус F_i, цилиндр C_i, сфероцилиндр sC_i, сферический сегмент G_i, сферический диск D_i) [3].

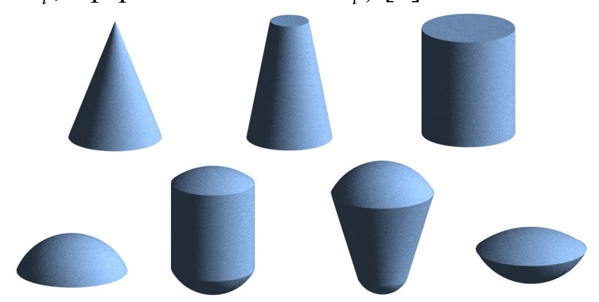


Рисунок 1 – Размещемые объекты

Объекты O_i, $i \in I$, допускают аффинные преобразования трансляции на вектор $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in R^3$ и поворота на углы $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i) \in R^2$ вокруг осей координат Ox' и Oy' соответственно. Вектор движения объекта O_i, $i \in I$, обозначим $u_i = (v_i, \theta_i)$. Тогда, вектор $u = (u_1,\ldots,u_n) \in R^{\omega_u}$, $\omega_u = 5n$, определяет положение всех объектов в трёхмерном пространстве. Объект O_i с вектором движения $u_i = (v_i, \theta_i)$ запишем как $O_i(u_i)$.

Область размещения P (контейнер) описывается следующим образом:

$$P = \{X = (x, y, z) \in R^3 : -a \le x \le a, -b \le y \le b, h_1 \le z \le h_2\}.$$

Контейнер P высоты $H(h) = H(h_1, h_2) = h_2 - h_1$ обозначим $P(h)$.

Кроме того, заданы кратчайшие расстояния между объектами

$$d_{ij} = \rho(O_i, O_j) = \min_{x \in O_i, y \in O_j} \rho(x, y),\ i < j \in I.$$

Также заданы кратчайшие расстояния d_i^k, $i \in I$, $k = 1,2,...,6$, между объектом O_i, $i \in I$, и каждой гранью контейнера P.

Задание кратчайших расстояний между объектами позволяет расширить множество размещаемых геометрических объектов. Так, если представить кратчайшие расстояния d_{ij} и d_i^k в виде $d_{ij} = \varphi_i + \rho_{ij} + \varphi_j$ и $d_i^k = \varphi_i + \rho_i^k$, $i \in I$, $k = 1,2,...,6$, то вместо объектов O_i на самом деле будут размещаться геометрические объекты $O_i^e = O_i \oplus S_i$, где $\oplus$ – знак суммы Минковского, S_i – сфера радиуса φ_i. При этом, минимально допустимое расстояние между объектами O_i^e и O_j^e будет равно ρ_{ij}, а между объектом O_i^e и гранью контейнера – ρ_i^k. Использование суммы Минковского позволяет получить расширенное множество размещаемых объектов, изображенное на рис. 2.

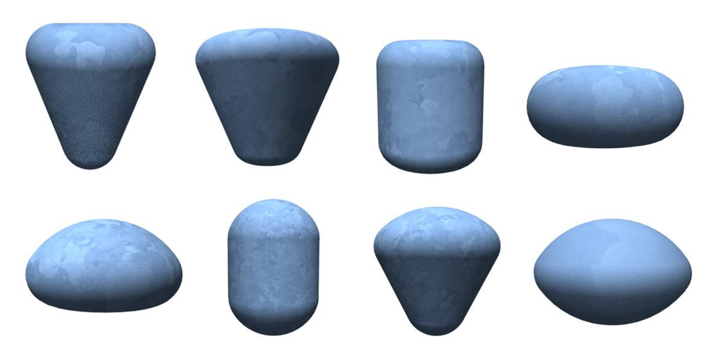


Рисунок 2 – Расширенное множество размещаемых объектов

Задача. Найти вектор $\hat{u} \in R^{\omega_u}$ такой, что объекты O_i, $i \in I$, содержатся в контейнере $P(h)$ с учетом заданных кратчайших расстояний и его высота $H(h)$ достигает минимума.

Для построения математической модели поставленной задачи в работе используется метод Ф-функций [4]. Для учета минимально допустимых расстояний в работе используется понятие псевдонормализованной квази Ф-функции [5].

Псевдонормализованной квази Ф-функцией Φ_{ij}^q для двух трехмерных объектов $O_i(u_i)$ и $O_j(u_j)$ называется непрерывная функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\max_{Y_{ij} \in R^3} \Phi_{ij}^q(u_i, u_j, Y_{ij}) < d_{ij}, \quad \text{если } \rho(O_i, O_j) < d_{ij},$$
$$\max_{Y_{ij} \in R^3} \Phi_{ij}^q(u_i, u_j, Y_{ij}) = d_{ij}, \quad \text{если } \rho(O_i, O_j) = d_{ij},$$
$$\max_{Y_{ij} \in R^3} \Phi_{ij}^q(u_i, u_j, Y_{ij}) > d_{ij}, \quad \text{если } \rho(O_i, O_j) > d_{ij}.$$

Представим математическую модель задачи в следующем виде:

$$h^* = \min h, X \in W \subset R^{\omega_u + \omega_Y + 2}, \tag{1}$$

где

$$W = \Big\{ X = (u, Y, h_1, h_2) \subset R^{\omega_u + \omega_Y + 2} : \Phi_{ij}^q \left(u_i, u_j, Y_{ij}\right) - d_{ij} \geq 0,\ i, j \in I,\ i < j,$$
$$\Phi_{it}\left(u_i, Y_t^0\right) - d_i^t \geq 0,\ i \in I,\ t \in \{1, 2, \ldots, 6\} \Big\}, \tag{2}$$

$\Phi_{ij}^q\left(u_i, u_j, Y_{ij}\right)$ – псевдонормализованная квази Ф-функция для объектов O_i и O_j [3], $\Phi_{it}\left(u_i, Y_t^0\right)$ – нормализованная Ф-функция объекта O_i, $i \in I$, и полупространства, отделяемого гранью контейнера [3], $Y = \left(Y_{12}, Y_{13}, Y_{23}, \ldots, Y_{(n-1)n}\right) \in R^{\omega_Y}$, $\omega_Y = 3\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Использование метода Ф-функций позволило записать условия взаимного непересечения объектов в виде набора систем неравенств, левые части которых являются гладкими функциями.

Задача (1), (2) является *NP*-трудной. Для поиска приближения к её глобальному экстремуму необходимо разработать метод получения локальных экстремумов.

Математическая модель (1), (2) построена в виде классической задачи нелинейного программирования. Поэтому для ее решения можно применять различные методы нелинейной оптимизации.

Чтобы применить численные методы нелинейной оптимизации необходимо получить начальную точку из области допустимых решений W. С этой целью в работе предлагается подход, основанный на введении вектора $\kappa = (k_1, \ldots, k_n) \in R^n$ переменных коэффициентов гомотетии $k_i, i \in I$, объектов $O_i, i \in I$.

Для каждого объекта введём величину S_i^0, равную сумме его метрических характеристик [3] и сформулируем задачу:

$$\max \sum_{i=1}^{n} S_i^0 k_i, X \in \Omega \subset R^{\omega_u + \omega_Y + n}, \tag{3}$$

$$\Omega = \left\{ X = (u, \kappa, Y) \subset R^{\omega_u + \omega_Y + n} : \Phi_{ij}^q \left(u_i, u_j, k_i, k_j, Y_{ij} \right) \geq 0, \, i, j \in I, \, i < j, \right.$$
$$\left. \Phi_{it} \left(u_i, k_i, Y_t^0 \right) \geq 0, \; 0 \leq k_i \leq 1, \; i \in I, \; t \in \{1, 2, \ldots, 6\} \right\} \tag{4}$$

Решим данную задачу с целью нахождения такого размещения объектов в области $P(h)$, при котором $k_i = 1, i \in I$. Заметим, что значение высоты $H(h) = H(h^0)$ всегда можно выбрать таким, чтобы выполнилось указанное условие. Обозначим $X^* = (u^*, 1, Y^*) \in \Omega$ – точку глобального максимума задачи (3)-(4). Тогда точка $(u^*, Y^*) \in W$ берется в качестве начальной для поиска решения задачи (1)-(2).

Для поиска локальных экстремумов сформулированных задач применяется подход, основанный на представлении области допустимых решений в виде объединения подобластей, задаваемых системами неравенств из псевдонормализованных квази Ф-функций для каждой пары объектов.

На рис. 3 приведены результаты численных экспериментов решения задач размещения объектов с учетом кратчайших расстояний, а также плотной упаковки объектов из расширенного множества.

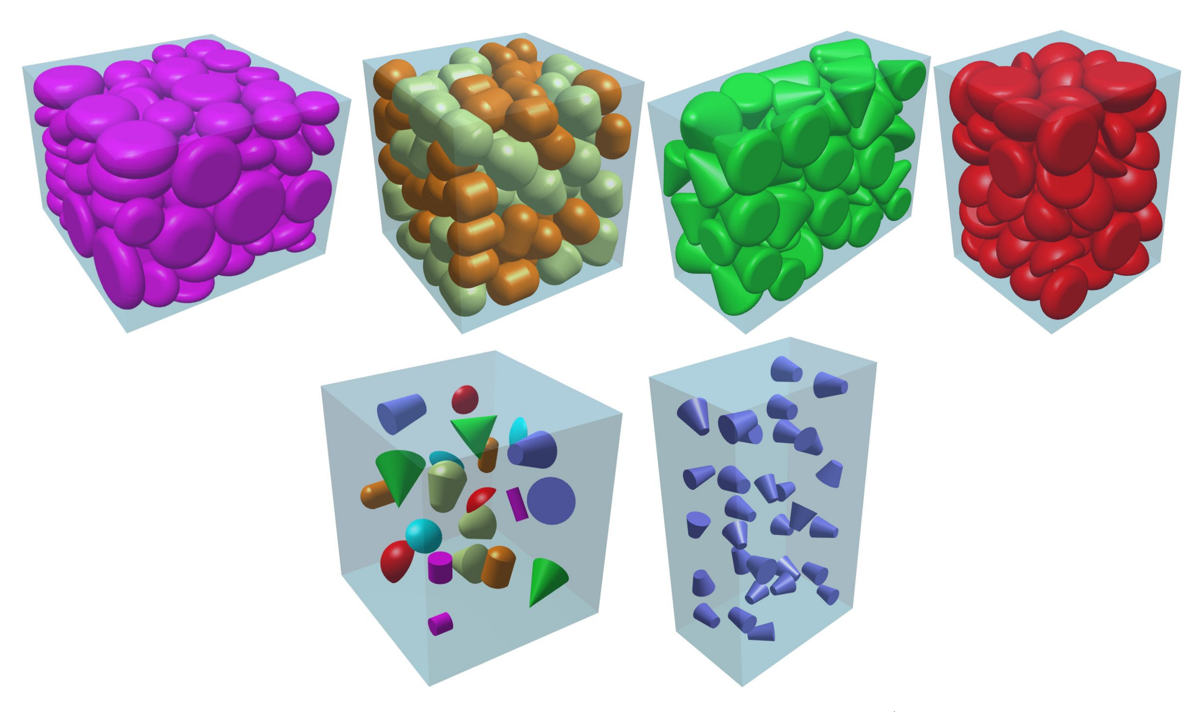


Рисунок 3 – Примеры размещения трехмерных объектов

Приведем численный пример. Пусть необходимо разместить 10 геометрических объектов, тип и метрические характеристики [3] которых представлены в табл. 1. При этом учитываем, что $\rho_{ij} = 0$ и $\rho_j^k = 0$, $i < j \in I$, $k = 1, 2, ..., 6$, то есть рассматривается плотная упаковка объектов из расширенного класса. В качестве области размещения выбран контейнер, основанием которого является квадрат с размером стороны равным 20.

Таблица 1 – Типы размещаемых объектов, их метрические характеристики и координаты точки локального экстремума

i	Тип объекта	φ_i	h_i^0	r_{i1}^0	r_{i2}^0	w_{i1}^0	w_{i2}^0	$\hat{x}_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{z}_i$	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$
1	$G_i \oplus S_i$	1,4	0	7,83	0	7,55	0	9,25	-9,30	-22,20	-3,14	3,14
2	$G_i \oplus S_i$	0,64	0	11,74	0	9,63	0	-6,97	-2,83	23,66	0	3,14
3	$G_i \oplus S_i$	1,52	0	8,34	0	7,44	0	9,35	-9,90	10,18	-0,63	-0,42
4	$D_i \oplus S_i$	1,84	0	7	7	6	3	-10,09	9,88	-14,41	1,40	4,06
5	$D_i \oplus S_i$	2,04	0	9,64	9,64	4	4	-8,53	7,92	5,71	3,97	-3,84
6	$C_i \oplus S_i$	1,66	7,9	4,62	4,62	0	0	-11,80	-12,07	2,61	-3,14	-0,04
7	$C_i \oplus S_i$	2,04	5,74	5,40	5,40	0	0	10,51	10,50	15,18	3,14	0
8	$K_i \oplus S_i$	1,44	3,42	8,05	0	0	0	-8,60	-8,40	-14,25	2,74	-0,63
9	$K_i \oplus S_i$	1,14	9,93	9,38	0	0	0	13,48	-13,48	-6,24	-0,49	-0,44
10	$K_i \oplus S_i$	1,77	10,4	8,52	0	0	0	12,52	11,63	-5,91	-0,53	3,53

Координаты точки локального минимума $\hat{u} \in W$ приведены в табл. 1, а размещение, соответствующее данной точке, изображено на рис. 4. Значение локального минимума: $H\left(\hat{h}\right) = 50,13$.

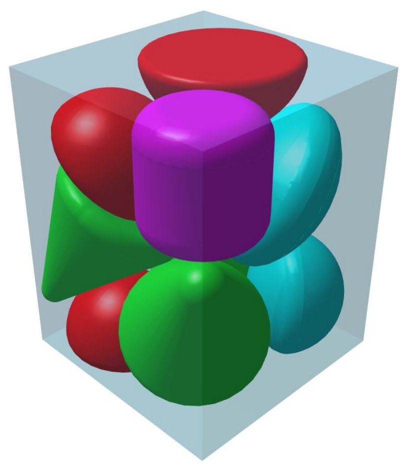


Рисунок 4 – Локальный экстремум задачи плотной упаковки специальных объектов

В работе благодаря использованию аппарата нормализованных Ф-функций и псевдонормализованных квази Ф-функций построена математическая модель задачи размещения неориентированных трехмерных геометрических в кубоиде минимальной высоты с учетом кратчайших расстояний. Построенная модель позволяет применять для поиска локальных экстремумов методы нелинейной оптимизации.

Список литературы

1. Егоров С.Я. Аналитические и процедурные модели компоновки оборудования промышленных производств / Егоров С.Я. – М. : «Издательство Машиностроение–1», 2007. – 104 с.
2. Стоян Ю.Г. Оптимизация компоновки трехмерных объектов в многосвязной области с учетом кратчайших расстояний / Ю.Г. Стоян, В.В. Сёмкин, А.М. Чугай // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С.58-70.
3. Сёмкин В.В. Поиск локальных экстремумов в задаче плотной упаковки неориентированных сфероконусов / В.В. Сёмкин, А.М. Чугай // Искусственный интеллект. – 2014. – №1.– С.74-79.
4. Stoyan Yu.G. Φ-function and its basic properties / Yu. G. Stoyan // Доп. НАН України. – 2001. – № 8. – С. 112-117.
5. Панкратов О.В. Математичні моделі, методи та інформаційні технології розв'язання оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук: спец. 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / О.В. Панкратов. – Харків, 2013. – 40 с.

References

1. Egorov S. Y. Analytical and procedural models of industrial production equipment layout. – M.: "Izdatel'stvo Mashinostroyeniye-1", 2007. – 104 p.
2. Stoyan Yu. G. Optimization of 3D Objects Layout into a Multiply Connected Domain with Account for Shortest Distances / Yu. G. Stoyan, V. V. Semkin, A. M. Chugay // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – № 3. – P. 58-70.
3. Semkin V.V. Searching for local extrema of non-oriented spherocones dense packing problem / V.V. Semkin, A.M. Chugay // Iskusstvennyy intellekt. - 2014. - № 1. - P.74 -79.
4. Stoyan Yu.G. Φ-function and its basic properties / Yu.G. Stoyan // Dop. NANU. – 2001. – № 8. – P. 112-117.
5. Pankratov O.V. Mathematical models, methods and information technologies for solving optimization placement of geometric objects: An abstract of a thesis for a Doctor of Technical Sciences degree in speciality 01.05.02 "Mathematical modeling and computational methods" / O. V. Pankratov. – Kharkiv, 2013. – 40 p.

RESUME

V.V. Semkin, A.M. Chugay

A Placement of Non-Oriented Three Dimensional Objects Taking Into Account Shortest Distances

In this paper for construction a mathematical model of optimisation placement problem of non-oriented geometrical objects into a cuboid with account of shortest distances we use the normalized Φ-function and pseudonormalized quasi Φ-function technic.

We consider a spherocone, cone, truncated cone, cylinder, spherocylinder, spherosegment and spherical discus as objects to be placed. Furthermore, we extend a set of placed objects via applying Minkowski sum for two point sets.

The mathematical model of a stated problem has been formulated as a classical non-linear programming problem. The feasible region can be represented as a union of subregions. Each subregion is described by a system of inequalities which left sides are smooth functions.

For construction of starting points we proposed method which assumes that coefficients of homothety of objects are variable.

In order to reduce computational cost we implement a search for local extrema on a sequence of subregions of a feasible region.

Статья поступила в редакцию 07.04.2014.